Stochastik in der Sekundarstufe 1

PETRA HAUER-TYPPELT, WIEN

„Stochastik in der Sekundarstufe 1“ bedeutet im aktuellen österreichischen Lehrplan ausschließlich die Behandlung von Inhalten der deskriptiven Statistik, die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist erst außerhalb des Pflichtschulbereichs in der Sekundarstufe 2 vorgesehen. Das steht im Widerspruch zu Erkenntnissen und Forderungen der Mathematikdidaktik und soll mit dem neuen Lehrplan geändert werden. Im Zentrum dieses Artikels steht das Entwickeln des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Sekundarstufe 1, in diesem Zusammenhang wird auch auf die Arbeit mit Baumdiagrammen näher eingegangen. Die Ausführungen sind mit dem Entwurf[1] für den neuen Mathematiklehrplan kompatibel, verstehen sich aber als mathematisch-didaktischer Beitrag mit davon unabhängiger Bedeutung.

1 Ausgangspunkt – Bedeutung und Ziele des schulischen Stochastikunterrichts

Im Alltag haben wir es häufig mit stochastischen Situationen zu tun. Darunter werden im Folgenden Situationen verstanden, in denen verschiedene Abläufe oder Ergebnisse möglich sind, es aber ungewiss ist, welcher bzw. welches eintreten wird. Viele unserer Entscheidungen werden im Szenario stochastischer Situationen gefällt, es müssen also Entscheidungen unter Unsicherheit getroffen werden. Defacto fällt sogar der überwiegende Teil wichtiger Entscheidungen in diese Kategorie. Als Beispiele können aus dem persönlichen Bereich Entscheidungen für einen Beruf oder den Wohnort genannt werden, aus dem medizinischen Bereich die Entscheidung für ein Medikament oder eine Behandlung oder aus dem aktuellen gesellschaftspolitischen Bereich die Entscheidung für Maßnahmen im Zusammenhang mit dem Covid-19 Virus.

Um fundierter einschätzen bzw. entscheiden zu können, wird nach Möglichkeit versucht, Daten zu stochastischen Situationen zu erfassen. Dies wurde und wird gerade im Zuge der aktuellen Coronakrise für die breite Öffentlichkeit nahezu täglich unmittelbar erfahrbar, von der Mathematikdidaktik wurde die Wichtigkeit von Datenerhebungen und deren angemessene Interpretation immer wieder betont. So formulierte der Arbeitskreis Stochastik der GDM (Gesellschaft für Didaktik der Mathematik) in seinen Empfehlungen zu Zielen und Gestaltung des Stochastikunterrichts:

> „Immer mehr Entscheidungen und Vorhersagen beruhen auf der Analyse statistischer Daten, die Gefahr von Fehlinterpretationen und Missbrauch von Daten nimmt zu. Der Einsatz stochastischer Modelle zum Treffen von Entscheidungen in Situationen der Ungewissheit gewinnt an Bedeutung.“ (Arbeitskreis Stochastik der GDM, 2003, S. 21)

Alleine daraus ergibt sich ein klarer Bildungsauftrag für den Pflichtschulbereich. Die Fähigkeit das Ergebnis von Datenerhebungen, insbesondere Wahrscheinlichkeiten richtig zu interpretieren, ist eine unverzichtbare Grundkompetenz, stochastische Grundbildung ein unverzichtbarer Beitrag zur Allgemeinbildung. Den Begriff der stochastischen Grundbildung charakterisieren Krüger, Sill und Sikora folgendermaßen

> „ […] verstehen wir unter stochastischer Grundbildung die Fähigkeit zur Interpretation und kritischen Bewertung stochastischer Informationen, Argumentation und Schlussfolgerungen sowie zur Modellierung stochastischer Phänomene in verschiedenen Kontexten. Dabei beziehen wir bewusst stochastische Situationen mit ein, die mit Hilfe von Daten und/oder Wahrscheinlichkeitsmodellen beschrieben werden.“ (Krüger et al. 2015, S. 2)

[1] Stand September 2022

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 54, 2022, S. 35 - 49.

Jungen Menschen muss im Rahmen ihrer Pflichtschulzeit die Möglichkeit gegeben werden, grundlegende Kenntnisse und Fähigkeiten zum Umgang mit Daten und den zugehörigen, gängigen Darstellungsweisen und zum Einordnen von Wahrscheinlichkeiten zu erwerben. Damit wird ein entscheidender Beitrag zum überfachlichen Bildungsziel des rationalen Denkens und Handelns geleistet. Brauner formuliert dies explizit als Ziel des Stochastikunterrichts der Sekundarstufe 1:

> „Ziel des Stochastikunterrichts der Sekundarstufe 1 ist, dass Schülerinnen und Schüler Daten und ihre üblicherweise vorkommende Darstellung sowie Wahrscheinlichkeiten vor dem Hintergrund des jeweiligen Sachkontextes beurteilen/hinterfragen und als Basis für Entscheidungen nutzen können.“ (Brauner 2013, S. 85)

Darüber hinaus geht es um den Aufbau fundierter Grundvorstellungen für weitere Lernprozesse im Bereich der Stochastik. Tietze et al. holen hier weiter aus und fordern einen intuitiven Zugang zu stochastischen Inhalten bereits ab der Primarstufe:

> „Der Stochastikunterricht in der Sekundarstufe II muss auf einer sicheren intuitiven Grundlage aufbauen. Diese Grundlage sollte unbedingt in der Primar- und Sekundarstufe I gelegt werden.“ (Tietze et al. 2002, S. 170)

Auch die Autorin selbst hat diese Notwendigkeit immer wieder thematisiert (vgl. z. B. Hauer-Typpelt 2010, S. 86 f.) und das Fehlen der Begriffe „Wahrscheinlichkeit“ und „Zufall“ in den österreichischen Lehrplänen der Sekundarstufe 1 als Versäumnis bezeichnet (vgl. Hauer-Typpelt 2020, S. 19). Insofern ist es erfreulich, viel mehr noch höchst an der Zeit, dass nun auch für den österreichischen Lehrplan geplant ist, den Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Sekundarstufe 1 zu verankern und aller Voraussicht nach in ersten Ansätzen bereits in der Primarstufe. Zum Zeitpunkt des Verfassens dieses Artikels befinden sich die geplanten Lehrpläne in Begutachtung, die Verordnung ist noch nicht erfolgt. Änderungen sind daher möglich, so gut wie undenkbar scheint es aufgrund der eben dargelegten inhaltlichen Gründe aber, dass ein neuer Lehrplan für die Sekundarstufe 1 die Verankerung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs nicht enthält. Überdies zeigt auch der internationale Vergleich – in Deutschland und vielen anderen Ländern wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff spätestens in der Sekundarstufe 1 eingeführt – , dass die aktuellen österreichischen Lehrpläne mit der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs erst in der Sekundarstufe 2 dem Forschungsstand hinterherhinken.[2]

2 Blick in den Vorschlag Lehrplan Mathematik Sekundarstufe 1

Der aktuell gültige Lehrplan für die Sekundarstufe 1 ist für jede der vier Jahrgangsstufen in vier Abschnitte unterteilt. Beschreibende Statistik ist im Abschnitt „4. Arbeiten mit Modellen, Statistik“ verankert, Wahrscheinlichkeit kommt nicht vor. Im Vorschlag für den neuen Lehrplan erfolgt für jede der vier Jahrgangsstufen eine Unterteilung in vier Kompetenzbereiche. Die ersten drei sind von der Bezeichnung her nahezu ident mit den Abschnitten des aktuellen Lehrplans, der vierte Kompetenzbereich „Daten und Zufall“ zeigt schon durch seine Bezeichnung die inhaltliche Erweiterung an. Tabelle 1 zeigt den Aufbau dieses Kompetenzbereiches.

[2] Aus rein pragmatischer Sicht ist der nicht unwesentliche Umstand zu ergänzen, dass basierend auf den Informationen bzw. Vorgaben des Bildungsministeriums für Verlage und Autor*innen bereits Mathematikschulbücher für die 5. Schulstufe auf Basis des Vorschlages für den neuen Lehrplan konzipiert und bei der Schulbuchkommission eingereicht wurden. Gutachten der Schulbuchkommission dazu, die ebenfalls auf dem Vorschlag für den neuen Lehrplan basieren, liegen ebenso bereits vor. (Stand 19.9.2022)

Tab. 1: Vorschlag Lehrplan Neu Sekundarstufe 1, Kompetenzbereich 4: Daten und Zufall (Beratungsgruppe 2021a, S. 6 ff.)

Schulstufe	Die Schüler*innen können …
5	– Daten erheben, ordnen, darstellen und aus unterschiedlichen Darstellungsformen ablesen – einfache statistische Kennzahlen ermitteln und interpretieren
6	– relative Häufigkeiten ermitteln, grafisch darstellen und grafische Darstellungen interpretieren
7	– statistische Darstellungen erstellen und nutzen; Manipulationen in statistischen Darstellungen erkennen – aufbauend auf einem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff Wahrscheinlichkeiten in einfachen Zufallsexperimenten ermitteln, vergleichen und interpretieren
8	– Kreuztabellen erstellen und interpretieren – Wahrscheinlichkeiten bei ein- und zweistufigen Zufallsexperimenten ermitteln und interpretieren

Die Kompetenzbeschreibungen zeigen die geplanten Neuerungen gegenüber dem aktuellen Lehrplan genauer. Im Folgenden sind für die vier Schulstufen der Sekundarstufe 1 jene (präzisierten) Kompetenzbeschreibungen aufgelistet, welche die maßgeblichsten Veränderungen im Bereich Stochastik darstellen (Beratungsgruppe 2021a, S. 10 ff.)

- 5. Schulstufe:
  - Lösen einfacher Abzählaufgaben, auch mithilfe von Baumdiagrammen
- 6. Schulstufe:
  - Arbeiten mit relativen Anteilen und relativen Häufigkeiten in mehrstufigen Situationen, insbesondere mithilfe von Baumdiagrammen
- 7. Schulstufe:
  - Verwenden eines intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs zur Quantifizierung von Sicherheit
  - Schätzen von Wahrscheinlichkeiten mithilfe empirisch gewonnener relativer Häufigkeiten
  - Ermitteln von Laplace-Wahrscheinlichkeiten bei einstufigen Zufallsexperimenten (z. B. Münzwurf, Würfeln); Interpretieren solcher Wahrscheinlichkeiten als Vorhersagewert für relative Häufigkeiten
- 8. Schulstufe:
  - Kreuztabellen erstellen und interpretieren
  - Wahrscheinlichkeiten bei ein- und zweistufigen Zufallsexperimenten ermitteln und interpretieren

Die bedeutendste Änderung ist mit der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der 7. Schulstufe gegeben. Daher werden wir im folgenden Kapitel 3, dem Kernstück dieses Artikels, darauf eingehen. Anschließend wird die Arbeit mit Baumdiagrammen, sowohl zur Lösung einfacher Abzählaufgaben als auch im Kontext von relativen Häufigkeiten und in Folge im Kontext von Wahrscheinlichkeiten thematisiert.

Ein Blick in den Lehrplan-Vorschlag für die Primarstufe zeigt, dass mit dem Kompetenzbereich „Zahlen und Daten“ die Arbeit mit Daten in allen vier Jahrgangsstufen vorgesehen ist. Die erste Auseinandersetzung mit Wahrscheinlichkeiten soll in der dritten Klasse angebahnt werden: „[…] die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen ihrer Lebenswelt qualitativ beschreiben und vergleichen.“ Auch in der vierten Klasse ist das qualitative Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten als Lehrplaninhalt vorgesehen (Beratungsgruppe 2021b, S. 5 ff.)

3 Entwickeln des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Sekundarstufe 1

3.1 Intuitiver Zugang – Anknüpfen an die Verwendung von „wahrscheinlich“ im Alltag

Die Ausbildung inhaltlicher Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff sollte also bereits in der Primarstufe beginnen. Da in der fünften und sechsten Schulstufe Wahrscheinlichkeit aber nicht im Lehrplan vorgesehen ist, wird es jedenfalls notwendig sein, Vorkenntnisse zu aktivieren oder auch grundlegende inhaltliche Vorstellungen neu zu erarbeiten. Überdies wird es noch lange dauern, bis in allen Volksschulen ein Erstzugang zu Wahrscheinlichkeit in einigermaßen gleicher Weise erfolgt.

Um den Wahrscheinlichkeitsbegriff intuitiv zu entwickeln empfiehlt es sich dort anzusetzen, wo Schüler*innen bereits Berührungspunkte haben, nämlich bei der Verwendung im alltäglichen Sprachgebrauch. Dazu gilt es einige Vorüberlegungen zu beachten.

- Wir verwenden das Wort „wahrscheinlich“ im Alltag meist im Sinn von „sehr wahrscheinlich“. Mit Aussagen wie „Wahrscheinlich werden wir den Urlaub in Italien verbringen.“ ist meist gemeint, dass wir das mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit tun werden.
- Wir drücken damit einerseits unsere Absichten aus, generell wird „wahrscheinlich“ verwendet, um das eigene Erwartungsgefühl zum Eintreten eines bestimmten Ablaufes oder Ergebnisses auszudrücken.
- Über dieses subjektive Erwartungsgefühl ziehen wir Wahrscheinlichkeiten häufig und unbewusst für Entscheidungen heran.

Daraus ergeben sich für einen intuitiven Zugang zum Fachbegriff „Wahrscheinlichkeit“ zentrale Ansatzpunkte für den Unterricht:

- Der umgangssprachliche Begriff „wahrscheinlich“ wird erweitert, um das eigene Erwartungsgefühl genauer auszudrücken. Wortkombinationen wie „höchst wahrscheinlich, sehr wahrscheinlich“ oder „wenig wahrscheinlich, “ kommen ins Spiel und werden an Beispielen aus dem Umfeld der Lernenden, aus der Natur oder aus gesellschaftlichen Vorgängen mit den Schüler*innen diskutiert.
- Dabei gilt es den prognostischen Charakter der Aussagen herauszustreichen.

3.2 Wahrscheinlichkeiten qualitativ angeben – Arbeit mit der Wahrscheinlichkeitsskala

Im Sinne eines intuitiven Zugangs geht es also zunächst darum, Wahrscheinlichkeiten qualitativ zu bestimmen. Im Anschluss an die rein verbale Behandlung von Beispielen empfiehlt sich die Arbeit mit der so genannten Wahrscheinlichkeitsskala, siehe Abbildung 1. Lernende werden aufgefordert, die Wahrscheinlichkeit zu einem Sachverhalt einzuschätzen und mit einem Kreuz auf der Skala zu markieren. Im Vergleich zur verbalen qualitativen Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten kommen mit der Wahrscheinlichkeitsskala zentrale Aspekte von Wahrscheinlichkeit als Fachbegriff hinzu:

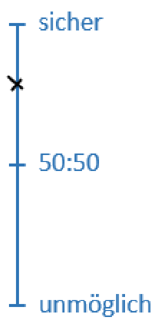


Abb.1: Wahrscheinlichkeitsskala 1

Es wird anschaulich klar, dass für Wahrscheinlichkeiten mehr unterschiedliche Grade möglich sind, als mit Worten gemeinhin ausgedrückt werden kann.

Es gibt eine obere und eine untere Grenze, die sicher bzw. unmöglich bedeuten, alle anderen Wahrscheinlichkeitsangaben werden dazwischen eingeordnet.

Damit wird die zentrale Idee der Normierung des Erwartungsgefühls leicht erfassbar ins Spiel gebracht.

Die Grundvorstellung, Wahrscheinlichkeit als Angabe des Grades an Gewissheit, mit dem eine Ereignis eintritt zu verstehen, wird gefördert.

In der praktischen Arbeit mit den Schüler*innen wird in der Regel die Frage nach der punktuellen Verortung der eigenen Einschätzung auf der Skala auftreten. Anhand dieser Frage lässt sich herausstreichen, dass es eben nur zwei eindeutige Zuordnungen (unmöglich und sicher) gibt, allenfalls die Mitte (50:50) noch als eindeutig betrachtet werden kann, andere Einschätzungen nur einem Bereich, nicht aber einem bestimmten Punkt auf der Wahrscheinlichkeitsskala zugeordnet werden können.

Die Darstellung der Wahrscheinlichkeitsskala wäre mit dem Argument bisheriger Skalierungserfahrungen (Zahlenstrahl) auch horizontal möglich. Wie auch Krüger et al. argumentieren, ist mit dem Ausblick auf die grafische Darstellung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, wo Wahrscheinlichkeiten auf der senkrechten Achse angegeben werden, die vertikale Lage von Wahrscheinlichkeitsskalen vorzuziehen. Überdies lassen sich in Aufgabenstellungen Wahrscheinlichkeitsaussagen günstig neben der senkrechten Skala platzieren. (Krüger et al. 2015, S. 73) Dies wird auch in den nachstehenden Aufgaben des Abschnittes 3.3 dieses Artikels so umgesetzt.

Die Arbeit mit der Wahrscheinlichkeitsskala ist auch auf der enaktiven Ebene sehr gut umsetzbar. Dazu können beispielsweise Holzstäbe oder Lineale verwendet werden, auf denen die Enden und die Mitte (z.B. mit Isolierband) deutlich farblich gekennzeichnet sind und die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit jeweils mit einer Kluppe markiert werden. Böhm (2022, S. 62 ff.) macht dazu ausführliche Vorschläge.

3.3 Grundvorstellungen zu den Aspekten des Wahrscheinlichkeitsbegriffs aufbauen – Worauf basieren unsere Einschätzungen?

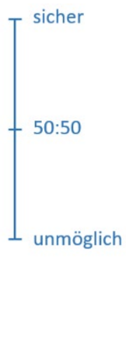
Um adäquate Grundvorstellungen zu den Aspekten des Wahrscheinlichkeitsbegriffs aufzubauen, ist es von Beginn an zentral, die Frage, wie man zu Wahrscheinlichkeiten kommt, ins Bewusstsein zu rücken. Denn die Auseinandersetzung mit dieser Frage in verschiedensten Zusammenhängen und die dabei erworbenen Grundkenntnisse sind unerlässlich, wenn es später darum geht, Wahrscheinlichkeiten richtig zu interpretieren. Mit „später“ ist hier keinesfalls nur „später im Mathematikunterricht“, sondern vor allem auch „später außerhalb des Mathematikunterrichts“ gemeint.

Im Folgenden werden konkrete Aufgaben vorgestellt, anhand derer Schüler*innen erkennen sollen, dass das Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten auf unterschiedlichen Säulen basieren kann. Der Bogen wird dabei vom alltagsnahen Einschätzen begründet durch Eigenerfahrung bis hin zur Idee der gezielten Datenerhebung und der Durchführung von Zufallsexperimenten gespannt.

Aufgaben zur Einschätzung basierend auf Eigenerfahrung

Bei Aufgaben dieser Art geht es darum, einerseits direkt an die alltägliche, unbewusste Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten anzuschließen und andererseits die Individualität dieser Ebene mit den daraus resultierenden unterschiedlichen Ergebnissen bewusst zu machen. Bereits auf dieser Stufe ist es gut möglich herauszuarbeiten, dass sich Wahrscheinlichkeiten ändern können, wenn sich die Bedingungen ändern.

Aufgabe:
Du darfst 10 Mal aus einer von dir selbst gewählten Distanz einen Korbwurf mit dem Basketball versuchen. Schätze die Wahrscheinlichkeit, dass du mindestens fünf Mal triffst und markiere sie auf der Wahrscheinlichkeitsskala.



Einschätzung bei geänderten Bedingungen:

Du darfst bei deinen 10 Würfen nicht näher als 10 m an den Korb heran. Schätze auch dazu die Wahrscheinlichkeit ein, dass du mindestens fünf Mal triffst.

Aufgaben zur Einschätzung auf der Basis von Kenntnissen

Aufgaben dieser Art führen unwillkürlich und im besten Sinne zu einer Diskussion um die Abgrenzung zwischen Kenntnissen und Meinungen. Damit entwickeln sich Grundkenntnisse, die auch Jugendliche in ihrem Leben brauchen, um entsprechende Situationen und Entscheidungen verstehen und gegebenenfalls auch kritisch hinterfragen zu können. Eichler fordert die Anbahnung dieser Kenntnisse bereits in der Grundschule, wenn dabei auch gesellschaftlich relevante Fragen eher außen vor bleiben und die Beispiele vor allem auch kindgerecht sein müssen. (Eichler 2021, S. 88) In der folgenden Aufgabe werden sehr unterschiedliche für die Sekundarstufe 1 taugliche Kontexte aufgegriffen.

Aufgabe:
Schätze jeweils die Wahrscheinlichkeit ein, mit der folgende Aussagen zutreffen:

- Je höher der höchste Bildungsabschluss einer Person ist, desto höher ist ihr Einkommen.
- Bei einer Wanderung auf der Hohen Wand sieht man Steinböcke.
- Das Tragen von FFP2-Masken reduziert die Ansteckungsgefahr mit Vireninfektionen.
- Im nächsten Jahr wird es von allen Monaten im September am wenigsten regnen.

Aufgaben zur Einschätzung auf der Basis von Daten

Anhand von Aufgaben wie den beiden vorgestellten können Lernende erkennen, dass Eigenerfahrung und eigene Kenntnisse individuelle Merkmale sind, aus denen sich recht unterschiedliche Einschätzungen von Wahrscheinlichkeiten ergeben können. Die Diskussion um diese unterschiedlichen Ergebnisse führen idealerweise zur Idee der gezielten Datenerhebung. Sehr gut kann das beispielsweise an der Einschätzung der letzten der vier Aussagen im vorangegangenen Beispiel herausgearbeitet werden. Der Wunsch nach Daten aus der Vergangenheit drängt sich förmlich auf, es kann mit einer Aufgabe wie der folgenden angeschlossen werden. Dabei zeigt sich auch, wie sich gegebenenfalls die Formulierung einer Aussage ändern muss, um datenbasiert einschätzen zu können.

Aufgabe: Verwende das Diagramm „Regentage im langjährigen Durchschnitt“ und schätze die Wahrscheinlichkeiten ein, mit der folgende Aussagen zutreffen. Markiere sie jeweils auf der Wahrscheinlichkeitsskala.

- Im nächsten Jahr wird es von allen Monaten im September die geringste Anzahl an Regentagen geben.
- Nächstes Jahr wird es im Juli an genau 13 Tagen regnen.

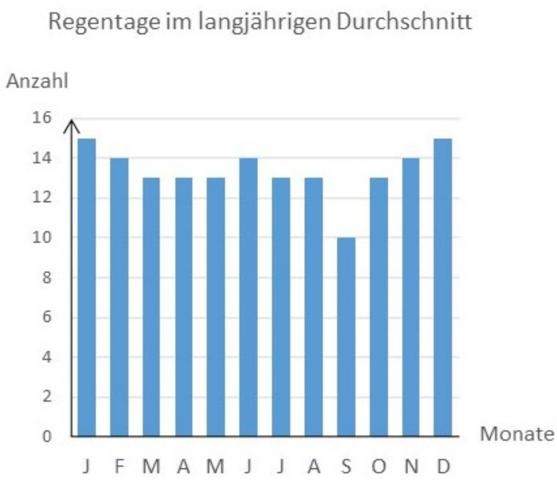


Abb. 2: Regentage in Wien im langjährigen Durchschnitt
Quelle der Daten: https://klima.org/österreich/klima-wien/

Die Verbindung zur Datenaufbereitung und deren Interpretation sollte für Schüler*innen offensichtlich werden und die Verzahnung zum eigenen Statistikunterricht genutzt werden. Beispielsweise indem man im Unterricht bereits bearbeitete Daten und grafische Darstellungen wieder heranzieht und für die Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten nutzt.

Aufgaben zur Einschätzung des Ausgangs von künstlichen Zufallsexperimenten

Mit dieser vierten Aufgabenkategorie sind an dieser Stelle Aufgaben gemeint, bei denen der empirische Aspekt keine Rolle spielt, vielmehr führt ein Gedankenexperiment zur Einschätzung der Wahrscheinlichkeit. (In Abschnitt 3.5 wird erweiternd auf das Schätzen von Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit künstlichen Zufallsexperimenten eingegangen.) In der Regel werden es im schulischen (Anfangs-)Unterricht tendenziell solche Aufgaben sein, bei denen via Laplace-Wahrscheinlichkeit genaue Zahlenwerte ermittelt werden können. (Dieser Aspekt des Wahrscheinlichkeitsbegriffs soll ja ebenso in der Sekundarstufe 1 angebahnt werden.) Sobald Schüler*innen mit Grundlagen der Bruchrechnung vertraut sind, wird die Behandlung solcher Aufgaben rasch von der qualitativen Einschätzung der Wahrscheinlichkeit in die Berechnung eines konkreten Zahlenwerts übergehen. Aufgaben wie die beiden folgenden sind daher in der Sekundarstufe 1 besonders für den Übergang zum Quantifizieren von Wahrscheinlichkeiten geeignet. Soll es beim qualitativen Einschätzen bleiben, so sind sie eher für die Primarstufe geeignet.

Aufgabe:
Du ziehst ohne hinzusehen eine Kugel. Schätze die Wahrscheinlichkeiten für folgende Aussagen und setze jeweils ein passendes Kreuz auf der Wahrscheinlichkeitsskala.

Ich ziehe eine rosa Kugel.

Ich ziehe eine rote Kugel.

Ich ziehe eine weiße Kugel.

Ich ziehe eine rote oder eine gelbe Kugel.

Aufgabe:
Wie wahrscheinlich ist es, dass das Glücksrad auf ein rotes Feld gedreht wird? Markiere jeweils auf der Wahrscheinlichkeitsskala.
(Quelle: Altmann et al. , S. 29)

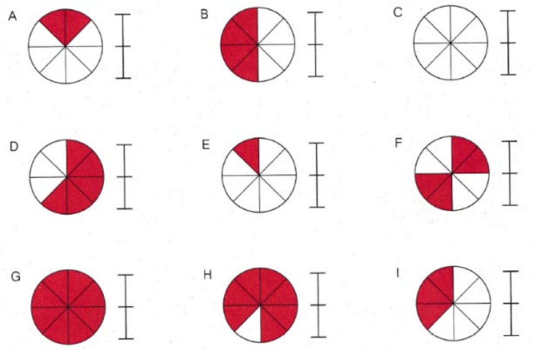


Abb. 3: Glücksrad (Altmann et al. 2019, S. 29)

3.4 Übergang zum Quantifizieren von Wahrscheinlichkeiten

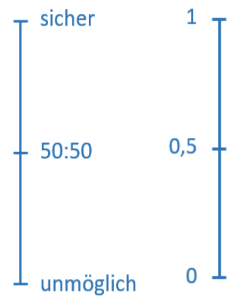


Abb. 4: Wahrscheinlichkeitsskala 2

Über das „neue" Skalieren der Wahrscheinlichkeitsskala von 0 bis 1 bzw. von 0% bis 100% erfolgt der Übergang zum Quantifizieren von Wahrscheinlichkeiten. Mit dem Graduieren von Wahrscheinlichkeiten von 0 bis 1 kann passenderweise der Übergang zur Symbolschreibweise einhergehen, z. B. P(Ereignis tritt ein) = 0,5.

Möglicherweise drängt sich bei mancher oder manchem die Frage auf, warum man nicht von Beginn an Wahrscheinlichkeiten quantifiziert. Welchen Mehrwert hat der Einstieg über die qualitative Angabe von Wahrscheinlichkeiten?

- Im Sinne eines intuitiven Zuganges ist die qualitative Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten besser geeignet, einerseits den Anschluss an das alltägliche Verständnis von „wahrscheinlich" aufzugreifen und andererseits auch die Abgrenzung der alltäglichen Verwendung vom Fachbegriff „wahrscheinlich" gut verständlich aufzubauen.
- Die quantitative Angabe von Wahrscheinlichkeiten bewirkt unwillkürlich den Wunsch nach einer Formalisierung, um tatsächlich einen konkreten Zahlenwert ermitteln zu können. Schüler*innen, die die Bedeutung eines Punktes auf einer skalierten Strecke verinnerlicht haben, haben zurecht Hemmungen ihre qualitative Einschätzung bei einem Punkt, der einem ganz konkreten Zahlenwert entspricht, zu verorten.
  Damit werden unter Umständen Kontexte bzw. Aufgaben, bei denen es um Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten auf Basis empirischer Befunde geht, zurückgedrängt. Gerade dieser Aspekt von Wahrscheinlichkeit ist aber jener, mit dem Menschen (im Allgemeinen) im (Berufs-)Alltag am häufigsten konfrontiert sind. Im Auftrag der Allgemeinbildung der Sekundarstufe 1 müssen daher gerade dieser Aspekt bzw. damit verbundene Kontexte eine besondere Betonung erfahren.
- Eine einseitige Darlegung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zugunsten der Möglichkeit rasch genaue Zahlenwerte bestimmen zu können, z.B. durch eine zu frühe, zu starke Fokussierung auf die Laplace-Wahrscheinlichkeit, sollte jedenfalls vermieden werden. Auch im Sinne der Vermeidung vorprogrammierter Schwierigkeiten in der Sekundarstufe 2, wenn es beispielsweise um das Verständnis eines Begriffes wie Irrtumswahrscheinlichkeit geht. Lernende, deren Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff sich nahezu ausschließlich über die Laplace-Wahrscheinlichkeit entwickelt haben, werden eher Verständnisschwierigkeiten haben.

3.5 Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Ein Kernpunkt für echtes Verständnis des Begriffs „Wahrscheinlichkeit" ist das Erfassen des Zusammenhanges zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit bei wiederholbaren Zufallsexperimenten. Möglichst alle Schüler*innen sollten am Ende der Pflichtschulzeit verstanden und verinnerlicht haben: Wahrscheinlichkeitsangaben entwickeln bei wiederholbaren Zufallsexperimenten zur Vorhersage relativer Häufigkeiten erst bei relativ vielen Versuchswiederholungen (großen n) ihre Bedeutung. Im Einzelfall bzw. für kleine n regiert der Zufall, erst für große n entwickeln sich auch seine Regelmäßigkeiten. Dabei gilt es im Unterricht beide Aspekte bzw. Richtungen herauszustreichen (vgl. Abb. 5):

- Wahrscheinlichkeiten, die nicht theoretisch ermittelt werden können, werden (nach Möglichkeit) aus relativen Häufigkeiten einer sehr großen Versuchsanzahl geschätzt. Dahinter steht das empirische Gesetz der großen Zahlen[3]: Die relative Häufigkeit eines Ereignisses schwankt bei großer Versuchsanzahl und gleich bleibenden Versuchsbedingungen immer weniger um einen bestimmten Wert.
  Es braucht also eine große Anzahl an Ergebnissen aus der Vergangenheit, um zu Prognosewerten für die Zukunft zu kommen.
- Diese Prognosewerte werden als Wahrscheinlichkeit bezeichnet und sollen relative Häufigkeiten vorhersagen. Diese Vorhersagewerte werden wiederum erst für eine große Anzahl an Versuchen relevant. Für eine kleine Anzahl an Versuchen oder gar im Einzelfall haben Wahrscheinlichkeiten weniger Bedeutung.

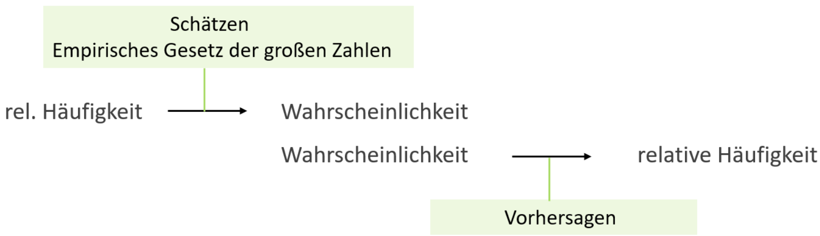


Abb. 5: Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Diese grundlegenden Einsichten werden am besten an konkreten Kontexten mit hohem Realitätsbezug und unmittelbar einsichtiger Relevanz (auch für den einzelnen Menschen) entwickelt.

Beispiel: Nebenwirkungen von Medikamenten
Anhand der Analyse von Packungsbeilagen werden folgende Fragen mit den Schüler*innen thematisiert und geklärt:

- Woher kommen die Zahlenangaben zu Nebenwirkungen? → Notwendigkeit der gezielten und umfangreichen Datenerhebung
- Welche Bedeutung haben die Zahlenangaben zu Nebenwirkungen (für die einzelne Person)?
  Relevanz der Zahlenangaben im Sinne einer Prognose für eine einzelne Person: Einfluss des Zufalls
  Relevanz der Zahlenangaben im Sinne einer Prognose für eine große Anzahl von Personen: Gesetzmäßigkeiten des Zufalls auf lange Sicht

Bemerkung zum Schätzen von Wahrscheinlichkeiten mithilfe von selbst ermittelten relativen Häufigkeiten

Die Durchführung klassischer Zufallsexperimente (Würfeln, Münze werfen, Ziehen mit Zurücklegen) eignet sich sehr gut, um die beiden Möglichkeiten zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten – Wahrscheinlichkeit aus relativen Häufigkeiten schätzen und Wahrscheinlichkeit durch Überlegung bestimmen bzw. berechnen – zu verbinden. Denn wie schon in Abschnitt 3.3. thematisiert, kommt bei klassischen künstlichen Zufallsexperimenten der Laplace-Ansatz unwillkürlich ins Spiel.
Soll der Fokus vorrangig auf dem empirischen Ansatz liegen, ist es empfehlenswerter Experimente heranzuziehen, deren Ausgang nicht via Laplace-Wahrscheinlichkeiten abschätzbar ist, da sonst die Notwendigkeit der Durchführung langer Versuchsreihen für Schüler*innen nicht unmittelbar einsichtig ist. Als Beispiele dafür können etwa das Werfen von Reißnägeln oder das Werfen von Legosteinen genannt werden, bei denen die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Möglichkeiten der Landung nur via langer

[3] Richard von Mises (1883, Lemberg – 1953, Boston) war bestrebt, das empirische Gesetz der großen Zahlen durch eine Grenzwertdefinition zu fassen. Da die damit einhergehende Konvergenz aber nicht garantiert werden kann, ist eine solche aber nicht haltbar.

Versuchsreihen abgeschätzt werden können. Dabei treten in der Regel durchaus anspruchsvolle Fragen auf, wie z. B. „Wie wissen wir, wann wir genug Wurfergebnisse haben?“ (Originalzitat einer Schülerin). Dazu können zwei unterschiedliche Standpunkte eingenommen werden:

- Mit der Bereitschaft, Abstriche in der Vollständigkeit und Exaktheit zu machen, können Fragen dieser Art auch in der Sekundarstufe 1 plausibel behandelt werden. Überdies sind sie insofern sehr gewinnbringend als sie eine – von Lernenden angeregte – Motivation darstellen, Grundcharakteristika stochastischer Fragestellungen und zugehöriger Lösungskonzepte zu thematisieren.
- Da solche Fragen nicht abschließend geklärt werden können, empfehlen beispielsweise Krüger et al. die Verwendung von Experimenten zur Stabilität der relativen Häufigkeit nicht:

  > „Bei Experimenten zur Stabilität der relativen Häufigkeit treten oft anspruchsvolle Fragestellungen auf, die […] meist auch nicht mit Mitteln der Schulmathematik überhaupt geklärt werden können.“ (Krüger et al. 2015, S. 85)

3.6 Laplace Wahrscheinlichkeit in der Sekundarstufe 1

Die Laplace-Wahrscheinlichkeit ist jener Aspekt des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, der im aktuellen Lehrplan und wohl auch im realen Schulunterricht am besten verankert ist. Allerdings erst in der 10. Schulstufe, das soll mit dem Vorschlag für den neuen Lehrplan geändert werden. Für die 7. Schulstufe ist vorgesehen:

> „Ermitteln von Laplace-Wahrscheinlichkeiten bei einstufigen Zufallsexperimenten (z. B. Münzwurf, Würfeln); Interpretieren solcher Wahrscheinlichkeiten als Vorhersagewert für relative Häufigkeiten“ (Beratungsgruppe 2021a, S. 21)

Begründet mit den Ausführungen aus Abschnitt 3.5 ist es sehr zu begrüßen, dass das Interpretieren von Laplace-Wahrscheinlichkeiten als Vorhersagewerte für relative Häufigkeiten eigens eingefordert wird. Für den Unterricht bedeutet dies, dass einerseits bei Aufgaben, in denen es um die Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten geht, immer auch die Interpretation dieser eine Rolle spielt. Andererseits sind auch Aufgaben zu stellen, die dezidiert dazu motivieren, Wahrscheinlichkeiten als Vorhersagewerte für relative Häufigkeiten zu verwenden.

Aufgabe:
Zu Werbezwecken veranstaltet eine Tourismusregion ein Gewinnspiel in verschiedenen Einkaufszentren. Dabei wird aus einem Sack mit vier sich gleich anfühlenden Holzwürfeln jeweils einer gezogen. Zieht man den Würfel mit dem Logo der Tourismusregion, gewinnt man einen Wochenendaufenthalt. Zieht man einen der drei anderen Würfel ohne Logo, erhält man ein Prospekt der Urlaubsregion.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einmaligem Ziehen den Wochenendaufenthalt zu gewinnen?
b) Mit wie vielen zu finanzierenden Wochenendaufenthalten kann der Veranstalter ungefähr rechnen, wenn 500 Personen spielen?
c) Für wen ist die Ermittlung der Gewinnwahrscheinlichkeit relevanter: Für die spielende Person oder für den Veranstalter? Erkläre.

Mit Aufgabenstellungen wie in b) kommen implizit Erwartungswerte ins Spiel. Dies braucht aber auf dieser Ausbildungsstufe nicht explizit gemacht zu werden, es soll hier nur über eine angemessene Interpretation von Wahrscheinlichkeiten eine ungefähre Punktschätzung durchgeführt werden. Das solide Verständnis dieser Vorgangsweise ist eine notwendige Grundlage für die Erarbeitung der Idee von Prognoseintervallen bzw. Streubereichen und damit auch von Konfidenzintervallen bzw. auch des Hypothesentestens in der Sekundarstufe 2.
Aufgabenstellungen wie in c) bieten Lerngelegenheiten, richtige Interpretationen von Wahrscheinlichkeiten für Argumentationen in außermathematischen Kontexten zu verwenden.

Auch bei der Arbeit in zweistufigen Situationen ist dem Berechnen und dem Interpretieren gleichermaßen Unterrichtszeit einzuräumen. Das Ermitteln solcher Wahrscheinlichkeiten kann unmittelbar auf dem Arbeiten mit Baumdiagrammen zur Ermittlung relativer Häufigkeiten aufbauen. Daher wird darauf am Ende des folgenden Abschnittes eingegangen.

4 Baumdiagramme in der Sekundarstufe 1

Für das Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten in zweistufigen Situationen ist das Baumdiagramm eine unverzichtbare Darstellungsform. Bislang werden Baumdiagramme im Mathematikunterricht an österreichischen Schulen üblicherweise erst in der Sekundarstufe 2 verwendet. Dabei sind sie ein nützliches Instrument zur strukturierten Darstellung von Situationen auch abseits der Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten. Der Vorschlag für den neuen Lehrplan sieht vor, das „Werkzeug" Baumdiagramme bereits in der 5. Schulstufe zum Lösen einfacher Abzählaufgaben zu verwenden (vgl. Kapitel 2). Abzählaufgaben sind dem Gebiet der Kombinatorik zuzuordnen. Wie zur Abgrenzung des Gebietes der Stochastik generell, gibt es auch hinsichtlich der Einordnung der Kombinatorik in die Stochastik mehr oder weniger stark voneinander abweichende Standpunkte. Auch nach Auffassung des Arbeitskreises Stochastik der GDM zählt Kombinatorik nicht zur Stochastik.

> „Die Kombinatorik wird nicht zur Stochastik im engeren Sinn gezählt. Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat die Kombinatorik die Funktion einer Hilfsdisziplin, indem sie geeignete Abzählverfahren zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bereitstellt." (Arbeitskreis Stochastik der GDM, 2003, S. 22)

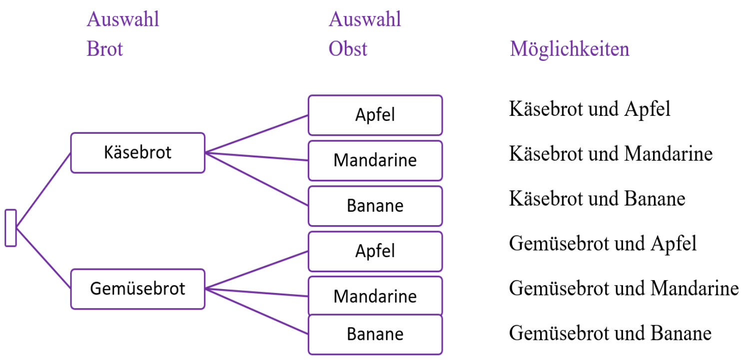
Im Lehrplanvorschlag sind Abzählaufgaben dennoch im Bereich „Daten und Zufall" verankert, eine Zuordnung zum Kompetenzbereich „Zahlen und Maße" wäre passender. Jedenfalls zählt die explizite Betonung der Arbeit mit Baumdiagrammen zu den wesentlichen inhaltlichen Veränderungen gegenüber dem aktuellen Lehrplan Mathematik der Sekundarstufe 1. Der Bogen des Einsatzes von Baumdiagrammen lässt sich über alle vier Schulstufen der Sekundarstufe 1 spannen.

Baumdiagramme in der 5. Schulstufe

Beim Lösen einfacher Abzählaufgaben geht es vorrangig darum, strukturiertes Zählen zu lernen. Dazu gehört es auch, Produkte als Zählergebnis erkennen zu können. Das lässt sich sehr gut anschaulich durch den Einsatz von Baumdiagrammen unterstützen, wie die nachstehende prototypische Aufgabe zeigt. Einfache Aufgaben dieser Art können bereits in der Primarstufe gestellt werden.

Aufgabe: Leona überlegt, welche Schuljause sie heute haben möchte. Zur Auswahl stehen Käse- oder Gemüsebrot und als Obst Apfel, Mandarine oder Banane. Wie viele Möglichkeiten hat Leona sich für ein Brot und eine Obstsorte zu entscheiden?

Darstellen aller Kombinationsmöglichkeiten in einem Baumdiagramm:

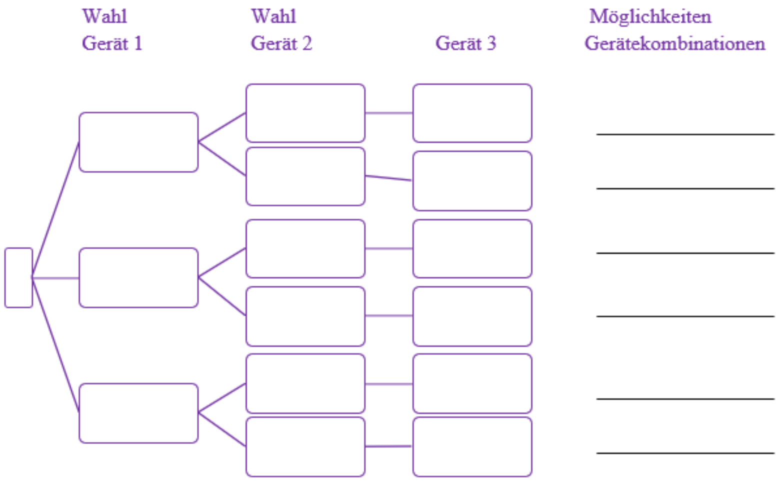


Neben der Auswahl unterschiedlicher, altersadäquater Kontexte ist besonders darauf zu achten, dass Aufgaben mit unterschiedlicher Struktur des Zählergebnisses im Wechsel bearbeitet werden, um nicht zur automatisierten Anwendung eines vermeintlich immer passenden Zählmusters zu verleiten.

Dabei kann anfänglich mit einem in der Struktur vorgegebenen Baumdiagramm, das bloß noch auszufüllen ist, unterstützt werden, wie die Aufgabe „Geräteturnen“ zeigt. Ziel ist es, dass ein passendes Baumdiagramm eigenständig angefertigt werden kann.

Aufgabe Geräteturnen:
Beim Geräteturnen stehen die Geräte Reck, Boden und Kasten am Programm. Jede Turnerin soll an jedem Gerät trainieren. Die Reihenfolge der Geräte dürfen die Mädchen selbst wählen. Ergänze das Baumdiagramm.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Turngeräte?
Schreibe eine Multiplikation auf, die zur Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten mit Hilfe des Baumdiagrammes passt.



Die Variation von Aufgabenstellungen eignet sich besonders, die Aufmerksamkeit auf unterschiedliche Zählergebnisse trotz ähnlich klingender Aufgabenstellungen zu lenken. Anhand des folgenden Beispiels wird überdies auch die Variation hinsichtlich des Grades an Hilfestellung und damit des Schwierigkeitsgrades gezeigt.

Aufgabe Zahlenschloss, Variante 1:
Ein Zahlenschloss hat drei Stellen. Für die Einstellung werden nur die Ziffern 7, 8 und 9 verwendet. Dabei darf eine Ziffer auch mehrfach vorkommen. Überlege wie viele Möglichkeiten es für den Zahlencode gibt:

Anzahl der Möglichkeiten für die erste Ziffer: ______

Anzahl der Möglichkeiten für die zweite Ziffer: ______

Anzahl der Möglichkeiten für die dritte Ziffer: ______

Schreibe die Rechnung an, mit der die Anzahl an Möglichkeiten für den dreistelligen Zahlencode ermittelt werden kann: __________________

Insgesamt gibt es _____ Möglichkeiten, einen dreistelligen Zahlencode mit den Ziffern 7, 8 und 9 zu erstellen.

Aufgabe Zahlenschloss, Variante 2:
Ein dreistelliger Code besteht nur aus den Ziffern 7,8 und 9, wobei jede Ziffer nur einmal vorkommt.

Schreibe alle Möglichkeiten auf, wie der Zahlencode aussehen kann. Gehe dabei systematisch vor. Schreibe auch eine passende Rechnung an, mit der die Anzahl an Möglichkeiten ermittelt werden kann.

Baumdiagramme in der 6. Schulstufe

Traditionell, also auch schon bei den Vorläufern des aktuellen Lehrplans, ist das Arbeiten mit relativen Anteilen und relativen Häufigkeiten in der 6. Schulstufe verortet. Das bleibt auch im Vorschlag für den neuen Lehrplan so. Neu ist, dass Baumdiagramme explizit Erwähnung finden:

> „Arbeiten mit relativen Anteilen und relativen Häufigkeiten in mehrstufigen Situationen, insbesondere mit Hilfe von Baumdiagrammen" (Beratungsgruppe 2021a, S. 17)

Aufgaben wie die nachstehende eigenen sich, um das Arbeiten in mehrstufigen Situationen zu erlernen.

Aufgabe Sommersportwoche:

An einer Sommersportwoche nehmen 60 Jugendliche teil. $\frac{2}{5}$ der Jugendlichen entschieden sich für Wassersport, der Rest der TeilnehmerInnen für Ballsport. Von der Ballsportgruppe wählte die Hälfte der Personen Fußball, die andere Hälfte Basketball. Von der Wassersportgruppe entschieden sich $\frac{2}{3}$ für Surfen, der Rest dieser Gruppe wählte Segeln.

Es bietet sich an, das zweistufige Vorgehen zunächst über das für Lernende im Allgemeinen einfachere Berechnen von absoluten Häufigkeiten zu erklären und den dabei verwendeten elementaren „von Ansatz" beim Multiplizieren mit Bruchzahlen zu wiederholen und festigen.

Aufgabenstellung: Berechne, wie viele Jugendliche sich für Surfen entschieden haben: $\frac{2}{5}$ von 60 entspricht der Multiplikation $\frac{2}{5} \cdot 60$ usw.

Die Möglichkeit der Berechnung einer natürlichen Zahl als Zwischenergebnis und der damit verbundenen elementaren Interpretation erleichtert für viele Lernende das zweistufige Vorgehen. Bei der Berechnung relativer Anteile in mehrstufigen Kontexten ist dies nicht möglich, daher empfiehlt sich dazu die Veranschaulichung durch ein Baumdiagramm besonders.

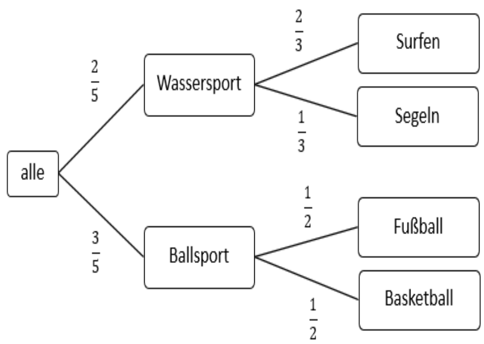


Abb. 6: Baumdiagramm zur Aufgabe Sommersportwoche

Das Darstellen des Berechnens absoluter Häufigkeiten in einem Schritt $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot 60\right)$ erleichtert das Übertragen auf die Berechnung relativer Anteile.

$\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{5}$ entspricht $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$.

Beim Erklären empfiehlt es sich, auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten, um für die Lernenden eine bessere Nachvollziehbarkeit zu gewährleisten. Ist das Verständnis gesichert, kann natürlich zum routinemäßigen Multiplizieren entlang des Pfades (führt eher zur Reihenfolge $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}$) übergegangen werden.

Unterrichtssituationen wie diese sollten auch genutzt werden, um Zusammenhänge (wiederholend) zu thematisieren und die Vernetzung von Unterrichtsinhalten zu fördern. Im vorliegenden Fall bezüglich des Multiplizierens zweier Anteile: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$ entspricht 50 % von 60 % bzw. $0{,}5 \cdot 0{,}6$

Baumdiagramme in der 8. Schulstufe

Bei der Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten in zweistufigen Situationen ändert sich an der strukturellen und der operativen Vorgehensweise nichts. Der Unterschied besteht in der Einbettung in den Kontext von Wahrscheinlichkeiten, wie in den folgenden typischen Aufgabenstellungen, die an die Ausgangssituation der Aufgabe Sommersportwoche anschließen.

Fragestellungen im Kontext von Wahrscheinlichkeiten zur Aufgabe Sommersportwoche:

- Eine Person des Kurses wird zufällig ausgewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person den Segelkurs gewählt hat.
- Am Mittwochnachmittag finden der Surfkurs und der Fußballkurs nicht statt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person am Mittwochnachmittag keinen Sportkurs hat.

Um verständnisorientiertes Vorgehen zu fördern, empfehle ich die so genannten Pfadregeln erst spät, im Sinne einer zusammenfassenden Formulierung, (oder auch gar nicht) ins Spiel zu bringen. Bewusst soll zunächst an vielen Aufgaben nicht nur kontextbezogen, sondern auch in operativer Hinsicht überlegt werden, sodass verständnisbasiertes Vorgehen in Routine übergeht und nicht etwa Regeln unverstanden zur Anwendung kommen.

5 Schlussbemerkungen, offene Frage und Apell

Dieser Artikel zum Stochastikunterricht in der Sekundarstufe 1 ist mit dem aktuellen Vorschlag[4] für den neuen Lehrplan vereinbar, versteht sich aber als mathematisch-didaktischer Beitrag mit davon unabhängiger Relevanz. Die vorgeschlagenen Aufgabenstellungen sind sowohl hinsichtlich des Kontextes als auch in der sprachlichen Formulierung überwiegend für die Altersstufe der 12 bis 14-Jährigen ausgewählt. Soll die erste Auseinandersetzung mit Wahrscheinlichkeiten in qualitativer Hinsicht in der Primarstufe erfolgen, wie derzeit im Lehrplanentwurf vorgesehen, können die Aufgaben aus dem zugehörigen Abschnitt 3.3 in adaptierter Form auch für die Primarstufe herangezogen werden.

Die offene Frage ist wohl, wann denn nun ein neuer Lehrplan in Kraft tritt. Klar ist aber, dass mit einem neuen Lehrplan die Einführung der Wahrscheinlichkeit in der Sekundarstufe 1 einhergehen muss, egal, ob der aktuell vorliegende Vorschlag umgesetzt wird oder noch Änderungen vorgenommen werden. Die inhaltlichen Gründe dafür wurden in diesem Beitrag aufgezeigt.
Internationale Schulleistungsstudien für 15-Jährige, wie PISA, zeigen die Verankerung von Wahrscheinlichkeit in der Sekundarstufe 1 in vielen Ländern auf, denn sie enthalten immer wieder Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit. Schwierigkeiten beim Erarbeiten der Konzepte der beurteilenden Statistik in der Sekundarstufe 2, wie wir sie aktuell in Österreichs Klassen vorfinden[5], können sicherlich zu einem Teil mit zu wenig fundierten Vorstellungen und Kenntnissen zu Grundbegriffen wie Wahrscheinlichkeit erklärt werden. Ein solch zentraler Begriff muss im Sinne des Spiralprinzips aufgebaut werden, sodass für die Lernenden eine reale Chance gegeben ist, tragfähige Grundvorstellungen aufzubauen und diese sowohl außerhalb des Mathematikunterrichts als auch in ihrer weiteren Ausbildung nutzen zu können.

Literatur

Altmann, S., Hentschel U., Kurtzmann G. (2019): *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit 4.* Braunschweig: Westermann.

Arbeitskreis Stochastik der GDM (2003): Empfehlungen zu Zielen und Gestaltung des Stochastikunterrichts. In: *Stochastik in der Schule* 23(3), 21-26. Online: https://www.stochastik-in-der-schule.de/sisonline/struktur/jahrgang23-2003/heft3/Langfassungen/2003-3_ak-empfehl.pdf (Zugriff: 19.9.2022).

Beratungsgruppe Mathematik (2021a): Fachlehrplan Mathematik für die Sekundarstufe 1, Empfehlung an das BMBWF https://bgm.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/p_bgm/LP_Sekundarstufe_1/LP_SEK_1.pdf (Zugriff: 19.9.2022).

Beratungsgruppe Mathematik (2021b): Fachlehrplan Mathematik für die Primarstufe , Empfehlung an das BMBWF https://bgm.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/p_bgm/LP_Primarstufe/LP_Primarstufe.pdf (Zugriff: 19.9.2022).

[4] Stand September 2022

[5] Das zeigen auch die immer wieder aufkeimenden Diskussionen um bzw. das Streichen von Inhalten der beurteilenden Statistik im Grundkompetenzenkatalog für die Zentralmatura auf.

BMBWF (2022): Begutachtungsentwürfe Lehrpläne. https://www.ris.bka.gv.at/Dokument.wxe?Abfrage=Begut&Titel=&Einbringer=BMBWF+(Bundesministerium+f%c3%bcr+Bildung%2c+Wissenschaft+und+Forschung)&DatumBegutachtungsfrist=11.07.2022&ImRisSeitVonDatum=&ImRisSeitBisDatum=&ImRisSeit=Undefined&ResultPageSize=100&Suchworte=&Position=1&SkipToDocumentPage=true&ResultFunctionToken=db24920c-f4c8-4d80-a357-ef0d56253089&Dokumentnummer=BEGUT_29087208_1955_485A_9CB3_25E1CF5935D3 (Zugriff: 19.9.2022).

Benischek, I., Hauer-Typpelt P., Sattlberger E., Steinlechner G. (2022): *Mathe 1*. Preprint bei Wien: HPT.

Böhm, T. (2022): *Der intuitive Wahrscheinlichkeitsbegriff.* Masterarbeit an der KPH Wien/Krems.

Brauner, U. (2013): Spiralcurriculum Stochastik Sekundarstufe I. In: Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.): *Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht.* 85-99. Online: https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/upload/Publikation_M_2013/sinus2013_m_06stochastik.pdf (Zugriff: 19.9.2022).

Eichler, A. (2021): Daten und Zufall. In: Leuders, J., Philipp, K. (Hrsg.): *Mathematik – Didaktik für die Grundschule.* 5. Aufl. bei Berlin: Cornelsen.

Hauer-Typpelt, P. (2011): Angemessene Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht. In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österr. Math. Ges.* 43, 75-87. Online:https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2010%20Band%2043/VortragHauerTyppelt.pdf (Zugriff: 19.9.2022)

Hauer-Typpelt, P. (2020): *Der Zufall und die Mathematik.* Reihe: Antrittsvorlesungen an der KPH Wien/Krems: Band 5. Wien: Rektorat der KPH Wien/Krems. Online: https://kphvie.ac.at/fileadmin/Dateien_KPH/Forschung_Entwicklung/Publikationen/KPH-Reihe/av-heft-hauert-typpelt.pdf (Zugriff: 19.9.2022).

Krüger, K., Sill H.-D., Sikora C. (2015): *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I.* Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.

Prechtl A., Schroeders N. (2018): „Zufall“ und „Wahrscheinlichkeit“ – Alltagssprache und Mathematik im Anfangsunterricht zur Stochastik. In: *Stochastik in der Schule* 38(3), 2-11.

Tietze, U., Klika M., Wolpers H. (2002): *Didaktik der Stochastik. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 3*. Braunschweig Wiesbaden: Vieweg.

Verfasserin

Petra Hauer-Typpelt
Kirchlich Pädagogische Hochschule Wien/Krems
Fachbereich Mathematik
Mayerweckstraße 1
1210 Wien

petra.hauer-typpelt@kphvie.ac.at